Devoir surveillé 2 - Séries et dénombrement

`Durée : 2h30`

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les consignes suivantes sont à respecter sous risque d'absence de correction ou de notation, dans ce sujet ainsi que dans tous les suivants :

- *Les résultats doivent être encadrés,*
- *Les pages doivent être numérotées,*
- *Chaque nouvel exercice ou nouveau problème commencera sur une nouvelle page. (Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, mais les question d'un même exercice doivent être traitées dans l'ordre.)*
- *Tout résultat ou toute affirmation doit être dûment justifié(e).*

Les téléphones portables doivent être rangés dans les sacs. **Calculatrices interdites dans ce sujet.**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Chaque étudiant portera en tête de son devoir le tableau suivant :

Réd.	*Rais.*	*Mod.*	*Calc.*	*Rech.*	*Représ.*	*Expl.*	*Cours*

Exercice 1 : Questions de cours

Dans l'exercice ci-dessous, **aucune démonstration** n'est exigée.

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Attention ! Toute réponse fausse entraîne une perte de points deux fois plus importante que le gain rapporté par la bonne réponse. Toutefois, la note finale ne pourra être inférieure strictement à -1. (Donc oui, l'exercice peut vous coûter des points à la fin en cas d'erreurs trop importantes. Si de plus aucune réponse n'est tentée, l'exercie rapportera également -1 point.)

a) Dès que (u_n) est décroissante de limite égale à 0, alors la série $\sum u_n$ converge.

b) Dès que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

c) La série de terme général nul est convergente de somme totale nulle.

d) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge.

e) Dès que $\sum u_n$ converge, alors $\sum |u_n|$ converge aussi.

f) Si $u_n \sim v_n$ avec $v_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n \sim \sum v_n$.

2. Donner les cas de convergence et les éventuelles sommes totales des séries géométrique, géométrique dérivée, géométrique dérivée seconde et exponentielle. (On ne demande pas de démonstration.)

Exercice 2 :

(Les questions ci-dessous sont indépendantes)

1. Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} e^{-2n}(\sin n)^n$

b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{n!}$.

2. Déterminer la nature et la limite éventuelle en cas de convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right)$.

Exercice 3 :

Soit a un nombre réel positif ou nul. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(k+a)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

où $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ désigne le produit $x_1 x_2 \dots x_n$.

1. *Question préliminaire :*
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x}$ diverge pour tout réel $x \geqslant 0$.

2. On suppose que $a \in [0,1]$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$$u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire que la série de terme général u_n est divergente.

On suppose à partir de maintenant que $a > 1$ et on note $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} u_{n+1}$$

b) En déduire que (S_n) est une suite majorée.

c) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4. a) Déterminer le sens de variation de la suite $\left(\frac{n+a}{a-1}u_n\right)_{n\geqslant 2}$.

b) Voici un petit tableau de valeurs approchées de $\frac{n+a}{a-1}u_n$ données par un programme Python pour diverses valeurs de a et de n :

$n =$	10	50	100	200	500	1 000	5 000
$a = 1.3$	1.9125	1.198	0.975	0.7927	0.6025	0.4895	0.3021
$a = 2$	0.1818	0.0392	0.0198	0.01	0.004	0.002	0.0004
$a = 5$	0.0012	0	0	0	0	0	0

Que peut-on conjecturer quant à la limite de $\frac{n+a}{a-1}u_n$?

c) Supposons que $\frac{n+a}{a-1}u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n \geqslant \ell \cdot \frac{a-1}{n+a}.$$

d) Montrer que $\left(\frac{n+a}{a-1}u_n\right)$ converge et calculer sa limite. *(On pourra procéder par l'absurde).*

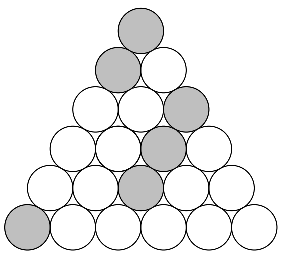
5. En déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Problème 1 : Triangles nippons et chemins ninja

Dans ce problème, l'appel aux schémas dans les explications est largement bienvenu.

Partie I — Triangle nippon

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un *triangle nippon de taille n* consiste en un ensemble de cercles disposés de manière à construire un triangle formé de n lignes, dont la $\ell^{\text{ème}}$ ligne contient exactement ℓ cercles et a été colorié de sorte qu'un (et un seul) de ces ℓ cercles soit gris et que les autres cercles de la ligne soient incolores. Ci-dessous un exemple de triangle nippon :



1. On se donne un triangle nippon de taille n.

a) Exprimer, en fonction de n (à l'aide d'une formule), le nombre total de cercles de ce triangle nippon ?

b) Justifier qu'il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles incolores dans ce triangle.

2. On pose t_n le nombre de triangles nippons de taille n.

a) Déterminer t_1 et t_2.

b) Montrer que

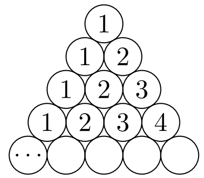
$$t_{n+1} = (n+1)\,t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) En déduire la valeur de t_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

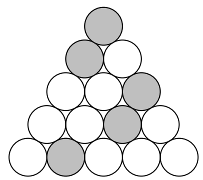
3. Dans cette question, on vise à contruire un programme Python intitulé ici `triangles_nippons` d'argument `n` permettant de rendre le liste de tous les triangles nippons de taille n.
On se propose donc de symboliser un triangle nippon par le dictionnaire suivant, qui associe à chaque ligne le "numéro" du cercle coloré sur ladite lilgne :

`{1:1, 2:''n° du cercle coloré de la 2ème ligne'',etc...}`

où la numérotation se fait de la manière suivante :



De cette manière, le dictionnaire `{ 1:1, 2:1, 3:3, 4:3, 5:2 }` symbolise le triangle nippon ci-dessous :



Ainsi, par exemple, pour $n = 2$, `triangles_nippons(2)` devrait rendre le résultat :

```
[ {1:1, 2:1} ; {1:1, 2:2} ]
```

Recopiez sur votre copie le programme ci-dessous, en remplaçant les " ?" par les instructions ou commentaires adéquats, afin qu'il rende ce qui est souhaité et qu'il soit compréhensible par le lecteur. Rajouter des commentaires supplémentaires n'est évidemment pas interdit. On provilégiera éventuellement l'utilisation d'une couleur différente pour les commentaires afin d'améliorer la lisibilité.

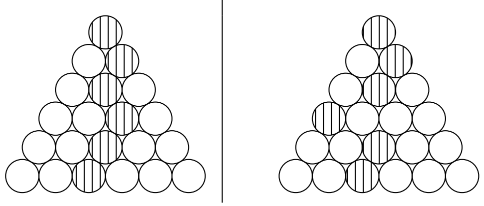
```
def triangles_nippons(n):
    Nippons=[{1:1}] # ?
    for i in range(2,n+1): # on construit ligne par ligne à partir de la deuxième
        prolongement=[] # ?
        for nip in Nippons: # nip est donc un dictionnaire
            # ?
            for j in range(1,?): # ?
                nouveau={} # ?
                for cle in nip:
                    nouveau[cle]=nip[cle] # ?

                nouveau[i]=j # ?
                prolongement.append(?) # ?
        Nippons=prolongement # ?
    return(Nippons)
```

Partie II — Chemin ninja

Indépendamment du choix de coloration du triangle nippon, si $n \geqslant 2$, on appelle *chemin ninja* toute suite de n cercles collés les uns aux autres, qui débute sur le cercle de la première ligne, dont chaque cercle est située juste en dessous du cercle qui le précède et qui se termine sur un cercle de la dernière ligne.

Voici un exemple de deux chemins (où on a hachuré les cercles du chemin). L'un (gauche) est bien un chemin ninja et l'autre (droite) n'est pas un chemin ninja :

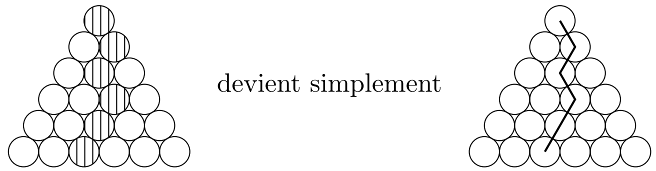
Chemin ninja : | **Chemin NON ninja :**



En effet, on observe sur le triangle de droite que les cercles du chemin ne sont pas "collés".

À des fins de simplification et afin de ne pas confondre la couleur du cercle avec le chemin, on symbolisera le chemin simplement par des lignes à partir de maintenant.

Ainsi, par exemple :

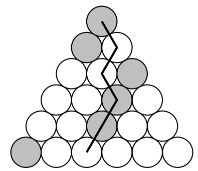


4. Pour tout $n \geqslant 2$, On pose c_n le nombre de chemins ninjas possibles pour un triangle de taille n.
- **a)** Déterminer c_2
- **b)** Déterminer c_3.
- **c)** Conjecturer une formule pour c_n et ensuite la démontrer.

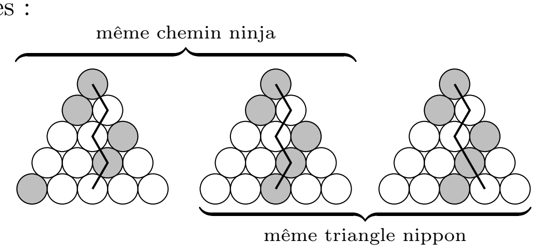
5. Par combien de chemin(s) ninja(s) peut-on atteindre :
- **a)** le cercle 1 de la ligne n / le cercle n de la ligne n ?
- **b)** le cercle 2 de la ligne 3 ?
- **c)** de manière générale, le cercle i de la ligne n avec $1 \leqslant i \leqslant n$?

Partie III — Un chemin ninja dans un triangle nippon

Voici un exemple de triangle nippon possible lorsque $n = 6$, ainsi qu'un chemin ninja contenant trois cercles gris.



On appelle *configuration complète* un triangle nippon muni d'un chemin ninja.
Ainsi, par exemple, les schémas comptent bien considérés comme trois configurations complètes différentes :



6. Soit $n = 2$. Dessiner l'ensemble de toutes les configurations complètes différentes possibles sur l'ensemble des triangles nippons possibles de taille n.

7. Justifier que pour n quelconque, il y a en tout $2^{n-1}n!$ configurations complètes possibles différentes.

8. On s'intéresse maintenant au nombre de cercles gris dans une situation complète, pour laquelle on note
- `nippon` : le dictionnaire décrivant le triangle nippon asscié à la situation complète, à la manière de ceux décrits dans la partie I *(qui est donc*

sous la forme `nippon = {1:1, 2:"numéro cercle coloré sur la 2ème ligne", etc...}`*.)*
- `ninja` : le chemin ninja associé à la situation complète sous la forme d'une liste `chemin = [`i_1`,` i_2`,...]` où i_k est le numéro du cercle de la ligne k par lequel passe le chemin. *(On a donc systématiquement* `chemin[0]=1`*.)*

Construire une fonction `compte_couleurs( nippon, chemin )` qui détermine le nombre de cercles colorés dans le chemin `chemin` pour le triangle nippon déterminé par `nippon`.

9. Nombre de cercles gris au maximum

a) Dans le cas $n = 2$, existe-t-il, dans chaque triangle nippon, un chemin ninja qui contienne la totalité des 2 cercles gris ?

b) Même question maintenant pour $n = 3$, mais avec cette fois-ci la totalité des 3 cercles gris.

c) Soit $n = 4$, est-il possible de trouver, dans chaque triangle nippon, un chemin ninja qui contienne 3 cercles gris ?

d) Soit $n = 4$, est-il possible de trouver, dans chaque triangle nippon, un chemin ninja qui contienne la totalité des 4 cercles gris ?

Exercice 1

1. 1.a) **Faux.**
Pour vous convaincre, l'exemple de $\sum \frac{1}{n}$ traité dans le cours est un contre exemple.

1.b) **Faux.**
Pour appliquer le théorème de comparaison des séries, il faut que tous les termes soient positifs, ce qui n'est pas supposé ici. On peut trouver facilement un contre exemple à cette assertion en prenant des séries de termes négatifs. Par exemple :

$$u_n = -1 \qquad v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On a bien

$$u_n \leqslant v_n$$

mais $\sum u_n$ diverge et $\sum v_n$ converge.

1.c) **Vrai.**
Il suffit pour s'en convaincre de poser la somme partielle qui vaut toujours 0.

1.d) **Vrai.**
C'est une série géométrique de raison $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

1.e) **Faux.**
Le théorème de convergence absolue fonctionne dans l'autre sens ! Ici, pour se convaincre que ça ne fonctionne pas, on dispose de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ dont on a parlé dans le cours.

1.f) **Faux.**
Les séries sont de même nature, mais on a bien vu dans le cours qu'elles pouvaient par exemple ne pas avoir la même limite (et que donc elles ne sont nécessairement pas équivalentes.)

2. cf. cours.

Exercice 2

1. 1.a) • Nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\cos(1+n)$:

On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|e^{-n}\cos(1+n)| \leqslant e^{-n}$$

Or, la série

$$\sum e^{-n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

est convergente car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1,1[$. En conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\cos(1+n) \text{ est absolument convergente, donc convergente.}}$$

1.b) • Nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{n!}$:

Attention, il ne faut pas confondre cette série avec une série exponentielle $\sum \frac{a^n}{n!}$ où a est constant. Ici, on sait, par croissance comparée que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^n}{n!} \text{ diverge grossièrement (vers } +\infty).}$$

2. • Série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right)$

En posant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la somme partielle d'ordre n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)}\right)$$

On peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) + \ln(k+1) - \ln k - \ln(k+3)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+2) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) \\
&= \sum_{i=3}^{n+2} \ln i + \sum_{j=2}^{n+1} \ln j - \sum_{k=1}^{n} \ln k - \sum_{l=4}^{n+3} \ln l \\
&= \left(\sum_{i=3}^{n+2} \ln i - \sum_{l=4}^{n+3} \ln l\right) + \left(\sum_{j=2}^{n+1} \ln j - \sum_{k=1}^{n} \ln k\right) \\
&= \ln 3 - \ln(n+3) - \ln 1 + \ln(n+1) \\
&= \ln 3 + \ln \underbrace{\frac{n+1}{n+3}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}
\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction ln, on a

$$\ln \frac{n+1}{n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 1 = 0$$

D'où la convergence de S_n et donc de la série, avec

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) = \ln 3}$$

Exercice 3

1. On peut dire directement que

$$\frac{1}{n+x} \sim \frac{1}{n} \geqslant 0$$

Or, on sait d'après le cours que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge et que la borne de départ n'y change rien. Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x}$ diverge et donc, par théorème de cours sur les termes généraux équivalents,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+x} \text{ diverge pour tout réel } x \geqslant 0.}$$

2. **2.a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a \in [0,1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < k \leqslant k+a \leqslant k+1$$

d'où, par produits de nombres positifs,

$$\prod_{k=1}^{n} k \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+a) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+1)$$

i.e.

$$n! \leqslant \prod_{k=1}^{n} (k+a) \leqslant \frac{(n+1)!}{1} = (n+1)!$$

En passant à l'inverse, comme tous les nombres sont de même signe et différents de 0, on inverse le sens des inégalités :

$$\frac{1}{n!} \geqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (k+a)} \geqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

d'où, par produit par $n! \geqslant 0$:

$$1 \geqslant u_n \geqslant \frac{n!}{(n+1)!}$$

ce dont on tire :

$$\boxed{u_n \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

2.b) On a, d'après la question précédente :

$$u_n \geqslant \frac{1}{n+1} \geqslant 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On sait de plus, d'après la première question avec $x = 1$, que $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on peut donc affirmer que

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ diverge.}}$$

3. **3.a)** On se propose de montrer ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On pose donc l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}_n \ : \ "S_n = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} u_{n+1}"$$

et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- <u>Initialisation pour $n = 1$:</u>

Si $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} u_{n+1} &= \frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1} u_2 \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1} \frac{2!}{\prod_{k=1}^{2} (k+a)} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{2+a}{a-1} \frac{2}{(1+a)(2+a)} \\
&= \frac{1+a}{(a-1)(1+a)} - \frac{1}{a-1} \frac{2}{(1+a)} \\
&= \frac{a-1}{(a-1)(1+a)} \\
&= \frac{1}{1+a} = u_1 = S_1
\end{aligned}$$

On a donc bien vérifié $\mathcal{H}_1$.

- <u>Hérédité :</u>

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons $\mathcal{H}_{n+1}$, c'est-à-dire : $S_{n+1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+2+a}{a-1}u_{n+2}$.

Notons que

$$u_{n+2} = \frac{(n+2)!}{\prod_{k=1}^{n+2}(k+a)} = \frac{n+2}{(n+2+a)}\frac{(n+1)!}{\prod_{k=1}^{n+1}(k+a)} = \frac{n+2}{n+2+a}u_{n+1}$$

On passe maintenant au calcul :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1} + u_{n+1} \quad \text{par HR} \\
&= \frac{1}{a-1} - \left(\frac{n+1+a}{a-1} - 1\right)u_{n+1} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a-a+1}{a-1}u_{n+1} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+2}{a-1}u_{n+1} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+2}{a-1}\frac{(n+2+a)}{n+2}u_{n+2} \\
&= \frac{1}{a-1} - \frac{n+2+a}{a-1}u_{n+2}
\end{aligned}$$

CQFD... $\mathcal{H}_{n+1}$ est donc vraie.

- Conclusion :

L'initialisation à $n=1$ et l'hérédité étant vérifiée, on est certain que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n entier supérieur ou égal à 1, i.e.

$$\boxed{S_n = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1}u_{n+1} \quad \forall n \geqslant 1}$$

3.**b)** Comme $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $a-1>0$ ainsi que $n+1+a>0$, on a immédiatement que

$$\boxed{S_n \leqslant \frac{1}{a-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

3.**c)** (S_n) est une série à termes positifs. Elle est donc croissante. Dans la question précédente, on a vu qu'elle était également majorée. Ainsi, par théorème de convergence des suites monotones, on est certain que (S_n) converge, ce qui signifie exactement que

$$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente.}}$$

4. 4.**a)** On peut observer que d'après la question 3a), on a

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_{n-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}u_n$$

D'où

$$\frac{n+a}{a-1}u_n = \frac{1}{a-1} - S_{n-1}.$$

Or, (S_n) est une série de termes positifs, elle est donc croissante comme nous l'avons déjà vu. Ainsi, $(-S_{n-1})$ est une suite décroissante. De plus, $\frac{1}{a-1}$ est constant. On en déduit donc que

$$\boxed{\left(\frac{n+a}{a-1}u_n\right)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

4.**b)** Il semblerait que dans tous les cas, la suite soit convergente, et ceci vers la v

4.**c)** Supposons que $\frac{n+a}{a-1}u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Comme la suite $\left(\frac{n+a}{a-1}u_n\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante, tous les termes sont plus grands que ℓ. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{n+a}{a-1}u_n \geqslant \ell$$

D'où, par positivité de $a-1$ et $n+a$,

$$\boxed{u_n \geqslant \ell \cdot \frac{a-1}{n+a} \quad \forall n \geqslant 2}$$

4.**d)** • Convergence :

On a vu que $\left(\frac{n+a}{a-1}u_n\right)_{n\geqslant 2}$ était décroissante. Comme elle est également positive (donc minorée), on sait qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- Calcul de la limite :

On aimerait montrer que $\ell = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. (C'est donc un raisonnement par l'absurde...)
Alors $\ell > 0$. D'après la question précédente, on sait que

$$u_n \geqslant \ell \cdot \frac{a-1}{n+a} \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 2.$$

Or, d'après la question 1, on sait que $\sum \frac{1}{n+a}$ diverge. Comme elle est multipliée par une constante $\frac{\ell}{a-1}$ non nulle, la série $\sum \ell \cdot \frac{a-1}{n+a}$ est encore divergente. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit alors que

$$\sum u_n \text{ diverge}$$

ce qui est absurde car nous avons montré la convergence de la série dans la question 3c) !

En conclusion, l'hypothèse de départ est fausse et on a bien $\ell = 0$. Ainsi

$$\boxed{\frac{n+a}{a-1} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

5. Avec la formule $S_n = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1+a}{a-1} u_{n+1}$ et la limite précédente, on a immédiatement

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{a-1}.$$

Or, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ ce qui signifie très exactement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{a-1}}$$

Problème 1 :

1. **a)** L'énoncé nous dit qu'on a ℓ cercles sur la ligne ℓ. Comme il y a au total n lignes, ça nous fait donc en tout $1+2+\cdots+n$ cercles. Or, on connait une formule pour cette valeur. Ainsi, on obtient

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2} \text{ cercles en tout}}$$

1.**b)** On a $\frac{n(n+1)}{2}$ cercles en tout et on retire à ces cercles les n cercles gris (un par ligne). Ainsi, on a donc

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n\,(n-1)}{2} \text{ cercles incolores}$$

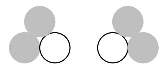
2. 2.**a)**
- Cas de t_1 :

Le cercle du haut étant toujours gris, et n'ayant qu'une seule ligne dans le triangle, on n'a qu'une seule possibilité de cercle nippon ! Ainsi,

$$\boxed{t_1 = 1}$$

- Cas de t_2 :

Le cercle du haut étant toujours gris, pour $n = 2$, on n'a que deux possibilités de triangle nippon qui correspondent aux deux choix de coloration des cercle de la $2^{\text{ème}}$ ligne :



Ainsi,

$$\boxed{t_2 = 2}$$

2.**b)** Une possibilité de raisonnement est la suivante :

Faire un trangle nippon de taille $(n+1)$ revient à en faire un de taille n puis rajouter une ligne de $n+1$ cercles, avec parmi ceux-ci un seul cercle gris.
Or, il y a exactement $(n+1)$ possibilités de construire une telle ligne supplémentaire, car cela correspond au choix de l'emplacement du cercle gris parmi les $(n+1)$ cercles disponibles. On a $n+1$ telles possibilités de choix.
Ainsi, par principe multiplicatif (choix successifs), on a bien

$$\boxed{t_{n+1} = (n+1)\, t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

2.**c)** On peut par exemple procéder de proche en proche (comme ce qui sera fait ci-dessous) ou alors raisonner par récurrence.
D'après la question précédente, on sait que si $n \geq 3$:

$$t_n = n\, t_{n-1} = n(n-1)\, t_{n-2} = \ldots = n(n-1)\ldots 2 \underbrace{t_1}_{=1} = n!$$

La formule étant encore vérifiée pour $n = 2$. i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

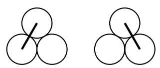
$$\boxed{t_n = n!}$$

3. Voici une proposition de remplacement des " ?" :

```
def triangles_nippons(n):
    Nippons=[{1:1}] # Dans la première ligne, c'est le cercle 1 qui est toujours gris.
    for i in range(2,n+1): # on construit ligne par ligne à partir de la deuxième. La ligne courante à construire est la ligne num i.

        prolongement=[] # initialise les dictionnaires qui seront construit avec la nouvelle ligne i en plus

        for nip in Nippons: # nip est un dictionnaire

```

```
            # on va parcourir chaque ligne une par une, de la première à la dernière actuellement construite

            for j in range(1,i+1): # j désigne le numéro du cercle qu'on va rajouter à la i ème ligne. On parcout donc toutes les possibilités.
                nouveau={} # initialisation d'un nouveau dictionnaire avec au final une ligne i en plus. On commence par recopier les lignes déjà existantes :
                for cle in nip:
                    nouveau[cle]=nip[cle]

                nouveau[i]=j # on ajoute la ligne i avec le cercle j.

                prolongement.append(nouveau) # on ajoute ce nouveau dictionnaire à tous ceux qui sont possibles.

        Nippons=prolongement # on a fini tous les dictionnaires associés à la nouvelle ligne. On remplace donc le dictionnaire existant par celui-ci

    return(Nippons)
```

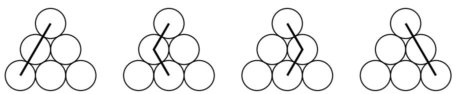
4. 4.**a)** Pour $n = 2$, on est confronté aux deux cas de chemins suivants :



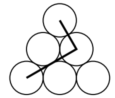
Ainsi,

$$\boxed{c_2 = 2}$$

4.**b)** Pour $n = 3$, les cas possibles sont les suivants :



Les autres possibilités ne sont pas des chemins ninjas car sinon les cercles touchés ne se "collent" pas.

Par exemple c'est le cas pour : 

Ainsi

$$\boxed{c_3 = 4}$$

4.**c)** Sur les deux premières valeurs calculées, on oberve que

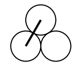
$$c_2 = 2^1, \qquad c_2 = 2^2$$

On peut ainsi conjecturer éventuellement que

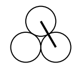
$$c_n = 2^{n-1}$$

Démontrons cette formule. Elle peut éventuellement se démonter par méthode directe ou par récurrence. On propose ci-dessous la méthode directe :

Le point de départ du chemin est fixe. Le chemin est entièrement déterminé par le choix des directions prises quand on passe à la ligne d'en dessous. Soit on part "à gauche" :

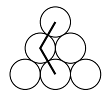


soit on part " à droite " :



Ce choix se fait $n - 1$ fois, le point de départ étant fixe.

On peut modéliser un chemin ninja par une $(n-1)$-liste d'élements parmi (G, D) qui désignent les directions prises (G pour gauche et D pour droite.)

Par exemple,  sera représenté par (G, D).

D'après le cours, on sait donc qu'on a

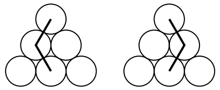
$$\boxed{c_n = 2^{n-1} \quad \forall n \geq 2}$$

5. 5.**a)** Pour chacun d'entre eux, on n'a qu' $\boxed{\text{une seule possibilité de chemin}}$. Il s'agit de l'enchainement de directions (G, G) pour le cercle 1 et (D, D) pour le cercle n :

En effet, dès qu'on part au moins une fois vers la droite, il est impossible de revenir vers les cercles $''1''$ (car les déplacements à gauche ne diminuent pas les numéros des cercles sur la ligne suivante). De même, de manière symétrique, dès qu'on part une fois vers la gauche, il est impossible de revenir vers les cercles n. (On pourra faire un schéma pour s'en convaincre.)

5.**b)** On constate que pour atteindre ce cercle, il y a $\boxed{\text{2 possibilités de chemins}}$.

Il s'agit de



Les $c_3 - 2 = 4 - 2 = 2$ autres possibilités sont celles qui arrivent sur le premier et le troisième cercle.

5.**c)** On observe dans la résolution précédente que pour atteindre le cercle 2, les possibilités sont de faire : (G, D) ou (D, G), ce qui correspond à toutes les possibilités de faire 1 déplacement vers la droite sur $n-1 = 2$ déplacements au total.

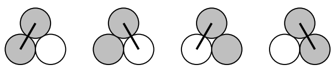
Or, on voit alors de manière générale qu'on peut aller au cercle i si et seulement si on a fait exactement $i-1$ déplacements vers la droite et $n-1-(i-1) = n-i$ déplacements vers la gauche :
En effet, chaque déplacement vers la droite augmente de 1 le numéro du cercle sur la ligne suivante et chaque déplacement à gauche conserve ce numéro. Ainsi, si d est le nombre de déplacements vers la droite et g le nombre de déplacements vers la gauche, sachant que le numéro du cercle de la première ligne boule est déjà de 1, si on veut atteindre le numéro i cela revient donc à chercher d, g tels que

$$\begin{cases} d = i-1 & \text{ex : pour aller au cercle 2, on a bien } 2-1=1 \text{ déplacement à droite} \\ d+g = n-1 & \text{car on a en tout } n-1 \text{ déplacements car } n \text{ lignes à joindre.} \end{cases}$$

Pour terminer, n'importe quelle combinaison de ces déplacements répondant à la question, chercher le nombre de chemins possibles revient à chercher le nombre de placements possibles des lettre G, D dans un mot de longueur $n-1$ contenant d lettres D et $n-1$ lettres G. Ceci correspond donc au choix d'emplacements pour D dans le mot (G étant alors placé automatiquement.)
On a donc

$$\boxed{\binom{n-1}{i-1} \text{ possibilités de chemins ninjas pour aller à } i \text{ en ligne } n.}$$

6. On a les 4 possibilités suivantes :



7. Pour construire une configuration complète, on peut procéder de la manière suivante :
On construit d'abord un tiangle nippon, puis on choisit un chemin ninja. Cela signifie que pour chaque triangle nippon (on en a t_n), on a c_n possibilités de chemin ninjas associés, et toutes ces configurations sont différentes. Par principe multiplicatif, on a donc en tout

$$t_n \times c_n \text{ possibilités.}$$

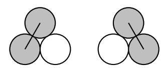
Ainsi, d'après les questions 2c) et 4c, on a donc

$$\boxed{2^{n-1} n! \text{ configurations complètes}}$$

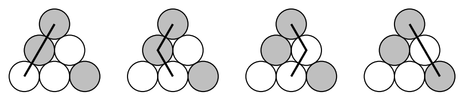
8. On propose le programme ci-dessous :

```
def compter (chemin, nippon):
    compte=0         # désigne le nombre de cercles colorés dans le triangle
    n=len(chemin)    # taille du triangle
    for k in range(1,n+1): # k désigne l numéro de la ligne.
        # Pour accéder au numéro du cercle du chemin, on demande chemin[k-1] (car les indices y démarrent de 0.)
        # Pour accéder au numéro du cercle coloré, on demande nippon[k].
        if chemin[k-1]==nippon[k]: # le cercle du chemin de la kème ligne est le cercle coloré.
            compte+=1
    return(compte)
```

9. 9.**a)** La réponse à cette question est $\boxed{\text{oui}}$. En effet, voici pour chacun des deux triangles nippons possibles, les configurations en question :

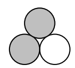


9.**b)** Là en revanche, la réponse à la questio est $\boxed{\text{non}}$. Nous pouvons observez directement ceci en faisant les graphiques des $c_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$ chemins ninjas possibles sur le triangle nippon :

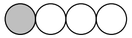
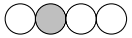
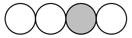
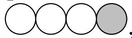


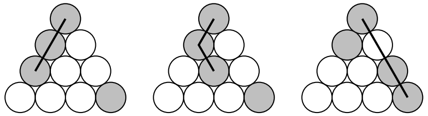
Aucun de ces chemins ne passe par 3 cercles rouges. Il existe donc un triangle ninja qui ne correpond pas à ce qui est demandé.

9.**c)** Contrairement au cas précédent, on peut tout à faire trouver pour chaque triangle nippon, un chemin accédant à trois cercles.

- Si le triangle commence par : 

quelquesoit la ligne intermédaire, alors on peut atteindre le cercle en ligne 4 :

dans le cas de figure  par le chemin GGG
dans le cas de figure  par le chemin GGD
dans le cas de figure  par le chemin GDD
et dans le dernier cas de figure , il n'y a que trois triangles nippons possibles, que l'on peut directement associer à un chemin contenant 3 cercles :



- <u>Les autres possibilités (démarrage vers la droite dès le départ)</u> sont simplement symétriques par-rapport à ces situations. Ainsi, on pourra $\boxed{\text{toujours trouver un chemin d'au moins 3 cercles.}}$

9.**d)** Ici, la réponse à la question est : $\boxed{\text{Non}}$. En effet, si le chemin doit passer par la totalité des cercles gris jusqu'à la dernière ligne, alors il doit le faire nécessairement jusqu'à la ligne 3 également, ce qui est impossible d'après la réponse à la question précédente !

On pourrait démontrer qu'à partir de $n = 4$, le nombre maximum k de cercles gris que l'on peut atteindre de manière à trouver un chemin ninja contenant k cercles gris dans chaque triangle nippon est de $k = 3$.